Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2012) p. 73-85

ASPECTES DE LA REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS EN EL *TRACTAT ELEMENTAL DE TRIGONOMETRIA* DE LACROIX[1]

MAITE NAVARRO;[1,2] LUIS PUIG[2]
[1] IES VELES E VENTS, TORRENT.
[2] UNIVERSITAT DE VALÈNCIA ESTUDI GENERAL.

Paraules clau: *Euler, Lacroix, coordenades cartesianes, representació gràfica de funcions, traçat de corbes, equació de la recta*

Aspects of the graphical representation of functions in Lacroix's *An Elementary Treatise on Trigonometry*

Summary: *In this paper we present part of an ongoing research in which we explore how the graphical representation of functions is made in some historical texts from the time in which the present way of representing functions in the Cartesian plane is being constituted, and from the time in which it is being included in textbooks as a subject that has to be taught. In this paper we deal specifically with Euler's* «Introductio in Analysin Infinitorum» *(1748), and Lacroix's* «Traité du calcul différentiel et du calcul intégral» *(1797) and* «Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie» *(1797).*

Key words: *Euler, Lacroix, cartesian coordinates, graphical representation of functions, curves drawing, straight line equation*

Introducció

La representació gràfica de funcions és una part important en l'educació secundària. De totes les representacions gràfiques, la gràfica cartesiana a partir d'un

1. Aquesta investigació és part del projecte EDU2009-10599 subvencionat per la Direcció General d'Investigació Científica i Gestió del Pla Nacional I+D+I del Ministeri de Ciència i Innovació d'Espanya.

sistema de coordenades és la més usual. Cada dia en la nostra pràctica docent constatem la dificultat que gran part del nostre alumnat presenta en la interpretació gràfica de funcions elementals, moltes vegades provocada per una lectura o localització incorrecta de les coordenades cartesianes en el pla.

El que presentem ací és part d'una investigació en la qual pretenem explorar de quina manera es realitza la representació gràfica de funcions en alguns textos històrics corresponents al moment en què la forma actual de representar les funcions en el pla cartesià s'està constituint, i el moment en què s'incorpora com a matèria que cal ensenyar en els llibres dedicats a l'ensenyament de les matemàtiques. En concret, hem centrat la nostra investigació en la *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) d'Euler, obra de la qual també hem consultat la traducció francesa clàssica (Euler, 1796-1797) i la traducció castellana recent (Euler, 2000), i el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797) i el *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* (1797) de Lacroix.

Precursors

Hi ha múltiples precursors de la idea de coordenada en la història. Segons Boyer (2007), Apoloni utilitza en les *Còniques* el que podríem anomenar un «sistema de coordenades a posteriori», basat en les distàncies intrínseques a una corba donada per estudiar les seves propietats. Segons Sierra (1997), estava present en els agrimensors egipcis, però la primera referència a les coordenades apareix en l'obra dels astrònoms i geògrafs grecs. Fins i tot, segons Sierra (1997), la divisió de les ciutats romanes en dos eixos perpendiculars, el *decumanus* i el *cardo*, organitzava els carrers en un sistema de coordenades rectangulars.

Els termes de latitud i longitud introduïts per Oresme per representar gràficament les variacions d'una funció d'una variable, s'assemblen bastant a les nostres ordenades i abscisses, respectivament.

A mitjan segle XVII, Descartes i Fermat inicien de manera independent la geometria analítica donant a les coordenades (en realitat només utilitzen una coordenada, l'abscissa) el seu estatus definitiu. Cadascun d'ells aporta una de les dues parts que conformen el principi fonamental de la geometria analítica. Descartes utilitza, fonamentalment, les coordenades per obtenir l'equació d'una corba a partir de la seva representació gràfica en el pla. Fermat les utilitza, sobretot, per representar el lloc geomètric corresponent a tota equació de dues incògnites.

Raons per a la selecció dels textos estudiats

Euler

D'Euler n'hem explorat la teoria general de corbes inclosa en la *Introductio in Analysin Infinitorum* pels següents motius:

- 1r. La *Introductio* d'Euler és un llibre d'autor que tracta de manera general i sistemàtica l'ús de coordenades. Des de la publicació en 1637 de la *Geometria* (*Géométrie*) de Descartes i de la *Introducció als Llocs Plans i Sòlids* (*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*) de Fermat en 1679 (encara que l'obra estava conclosa en 1636), l'ús de diferents tipus de coordenades en els inicis del càlcul infinitesimal estava estès (Newton, L'Hôpital, Ditton, Reyneau, Maclaurin…) però no sistematitzat. Euler tracta de manera general i sistemàtica l'ús de coordenades en el segon volum de la *Introductio*, encara que també ell les havia utilitzat amb anterioritat.

- 2n. La sistematització de coordenades es fa amb la finalitat d'estudiar les propietats de les funcions.
- 3r. Aquest llibre recull els resultats d'altres matemàtics. En el prefaci de la *Introductio* Euler manifesta que moltes de les coses que conté ja han estat tractades per uns altres.
- 4t. Gaudeix del reconeixement dels seus contemporanis. Són molt conegudes les lloances fetes per Johann Bernoulli («Jo represente l'anàlisi superior com si estiguera en la seva infantesa, però tu ho estàs portant al seu estat adult») i per Laplace («Llegiu a Euler, llegiu a Euler. Ell és el mestre de tots nosaltres»).
- 5è. Gaudeix del reconeixement dels investigadors del segle XX. Felix Klein (2006) realitza una digressió sobre el concepte general de funció en la qual afirma que la seva formulació comença amb Euler amb dues explicacions diferents de la paraula funció: la primera defineix com a funció tota expressió analítica de x. En la segona, una funció $y = f(x)$ queda definida per Euler sempre que una corba qualsevol siga dibuixada en un sistema d'eixos coordenats x, y.
- 6è. És font d'elaboració d'altres llibres, en particular dels tractats de Lacroix que també hem estudiat.

Lacroix

Hem triat el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* i el *Traité Élémentaire de Trigonométrie Rectiligne et Sphérique, et d'application de l'Algèbre a la Géométrie* pels següents motius:

1r. Pels diferents usos per part de Lacroix de les obres d'Euler. Lacroix inicia la seva pràctica docent usant les obres d'Euler i quan elabora els seus propis manuals utilitza en la teoria general de corbes la *Introductio* d'Euler.

2n. El *Traité du calcul* recull els resultats originals de nombrosos investigadors. El *Traité du calcul* va ser el primer tractat general sobre càlcul infinitesimal des de la *Introductio*. A més dels resultats originals d'Euler, recull els d'investigadors com ara Lagrange, Laplace, Monge, Cauchy i d'altres, organitzats de tal manera que estructuren els elements del càlcul diferencial i integral amb un doble propòsit, d'una banda recollir en un sol tractat tot allò que es fa servir en l'època sobre el càlcul, i d'altra facilitar el procés d'ensenyament-aprenentatge del càlcul.

3r. Per la importància en l'ensenyament de les matemàtiques dels seus tractats. Les obres de Lacroix són llibres de text publicats en l'època de la Revolució Francesa quan per primera vegada s'establí un sistema d'educació general i públic. Entre altres temes, el *Traité du calcul* conté les nocions generals sobre funcions i la seva representació gràfica en el pla mitjançant un sistema de coordenades, sistematització que exposa de manera més detallada i més «elementaritzada» en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*. Els seus tractats gaudeixen de gran quantitat d'edicions i traduccions. De l'«elementarització» del *Traité du calcul* naix el *Traité Élémentaire du calcul*, utilitzat com a manual d'ensenyament no solament a Europa sinó també a Amèrica. Citem a continuació totes les edicions dels llibres estudiats que hem pogut localitzar, tant de l'original en francès com la traducció castellana.

Traité de calcul différentiel t I	1a	1797 (V)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t II	1a	1798 (VI)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t III (*Traité des différences et des séries*)	1a	1800 (VIII)	Paris	Duprat
Traité de calcul différentiel t I	2a	1810	Paris	Courcier
Traité de calcul différentiel t II	2a	1814	Paris	Courcier
Traité de calcul différentiel t III	2a	1819	Paris	Courcier
Traité élémentaire de trigonométrie	1a 2a 3a 4a 5a 6a 7a 8a 10a	1798 1800 (VIII) 1803 (XII) 1807 1810 1813 1822 1827 1852	 Paris Paris Paris Paris Paris Paris Paris Paris	 Duprat Courcier Courcier Courcier Courcier Bachelier et Huzard Bachelier Bachelier
Tratado elemental de trigonometría…	6a 7a 8a	1820 1835 1846	Madrid Madrid Madrid	En la Imprenta Real En la Imprenta Real En la Imprenta Nacional

4t. Per la seva repercussió en l'ensenyament de les matemàtiques a Espanya. Els textos de Lacroix van influir en autors espanyols, per exemple en Vallejo. Però, sobretot, el seu *Curso completo elemental de matemáticas* es va traduir al castellà i es va reeditar diverses vegades i fins i tot es va establir com a llibre de text en els estudis superiors, segons apareix en l'article 42 del títol IV de *Decretos del rey nuestro señor don Fernando VII, y reales órdenes, resoluciones y reglamentos generales expedidos por las secretarías del despacho universal y consejos de S. M. en los seis meses contados desde 1º de julio hasta fin de diciembre de 1824. Tomo 9*, publicat l'any 1825, on hi ha detallat el pla d'estudis de Filosofia i es diu: «*Art. 42. Segunda: en todas estas cátedras durarán las lecciones hora y media por la mañana y una por la tarde; sirviendo de texto para las Matemáticas puras las obras de Mr. Lacroix, traducidas por Rebollo*».

5è. Perquè a més d'escriure llibres de text també va escriure sobre l'ensenyament en general i l'ensenyament de les matemàtiques en particular.

6è. Per la universalitat de la seva obra. Segons Schubring (1987), Lacroix desenvolupa un cos coherent de matemàtiques escolars, des de la secundària fins a l'educació superior.

Sistematització de les coordenades

Les qüestions que hem vist que fan que la sistematització de les coordenades siga possible són les següents:

- La dotació de significat de les quantitats negatives tant en l'àlgebra com en la geometria.
- La fixació d'un origen de coordenades.
- El significat de la idea d'abscissa.
- El pas de la idea d'aplicada a la idea d'ordenada.
- El pas de la consideració de les coordenades com a magnituds geomètriques a la seva consideració com a distàncies, la qual cosa comporta considerar-les com a nombres.
- I, finalment, l'establiment d'eixos de coordenades absoluts, és a dir, independents de la corba considerada.

Dotació de significat de les quantitats negatives en l'àlgebra

Aquesta és una qüestió bastant complexa i sobre la qual hi ha molt d'estudiat i escrit. Els aspectes més rellevants que tenen influència en la representació gràfica de funcions mitjançant coordenades cartesianes els podem resumir de la següent manera.

- En tots tres llibres les lletres representen qualsevol tipus de nombre. Així doncs, la lletra simbolitza un nombre positiu o negatiu.
- Tanmateix, cada vegada que es vol subratllar que la quantitat és negativa, l'expressió porta explícitament anteposat el signe – (Fig. 1), amb la qual cosa la lletra ja només pot representar un nombre positiu (Lacroix, 1807: 113):

Lorsque x sera négatif, on trouvera
$y = -ax + b$,

FIGURA 1. Quantitats negatives en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

Dotació de significat de les quantitats negatives en la geometria. Fixació d'un origen

Per representar quantitats en la geometria en la *Introductio*, Euler fa servir magnituds. Representa les magnituds com a segments en una recta indefinida, que orienta arbitràriament respecte d'un punt prèviament fixat, l'origen. Perquè la correspondència siga biunívoca cal considerar només els segments que tenen l'origen com un dels seus extrems.

L'arbitrarietat de la ubicació de les quantitats en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* queda reflectida en la representació que hi fa de sinus i cosinus (Fig. 2), en què cal observar que mesura els arcs a partir del punt A i en el sentit horari (Fig. 3), probablement sota la influència de l'astronomia.

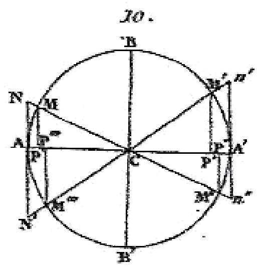

FIGURA 2. Representació de sinus i cosinus en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

En récapitulant ces résultats on verra,
1°. Que depuis le point A jusqu'au point A', où l'arc $ABA' = \frac{1}{2}\pi$, les sinus sont positifs;
2°. Que depuis le point A' jusqu'au point A, où l'arc $ABA'B'A = 2\pi$, c'est-à-dire de π jusqu'à 2π; les sinus sont négatifs;
3°. Que depuis le point A jusqu'au point B, où l'arc $AB = \frac{1}{2}\pi$, les cosinus sont positifs;
4°. Que depuis le point B jusqu'au point B', où l'arc $ABA'B' = \frac{3}{2}\pi$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{3}{2}\pi$, les cosinus sont négatifs;

FIGURA 3. Sentit de la mesura dels arcs en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

Les magnituds corresponents als valors negatius dels sinus se situen per sota del diàmetre *AA*'; els valors negatius dels cosinus, a la dreta del punt *C*.

L'oposició dels signes en el càlcul es tradueixen en la geometria en la inversió de la posició de les magnituds respecte d'un segment o un punt. Per tant, la dotació de significat de les quantitats negatives fa imprescindible la fixació d'un origen.

Significat de la idea d'abscissa

L'origen es concep com un punt arbitrari però imprescindible en la construcció de les coordenades per segments, ja que l'origen ha de ser un dels seus extrems.

Euler defineix abscissa (Fig. 4) en la *Introductio* com un interval orientat de la recta mesurat des de l'origen (Fig. 5) que representa un valor determinat de la quantitat variable.

On appelle ces intervalles *AP*, ABSCISSES.

FIGURA 4. Definició d'abscissa en la *Introductio*.

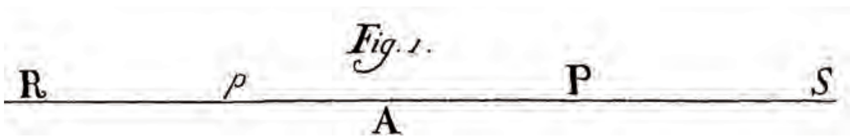

FIGURA 5. Representació de l'abscissa en la *Introductio*.

Cal subratllar que l'abscissa no és el punt en la recta, ni la longitud de l'interval, sinó que l'abscissa és l'interval, el segment *AP*.

Fixa arbitràriament a la dreta de l'origen els valors reals positius de la variable *x*, a l'esquerra els negatius i el valor zero en l'origen.

En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* Lacroix transforma l'abscissa en la longitud d'aquests segments.

De la idea d'aplicada a la idea d'ordenada

Euler sistematitza en la *Introductio* les coordenades per tal de representar i estudiar les propietats de les funcions.

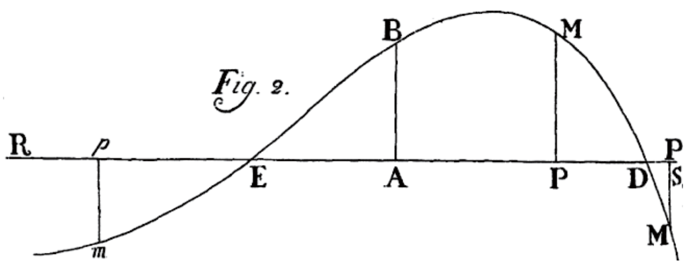

FIGURA 6. Aplicades en la *Introductio*.

Per a cada valor determinat de *x*, la funció *y* pren un valor determinat que representa elevant una perpendicular, l'*aplicada* (Fig. 6). Encara que en l'època s'usa el terme d'ordenada, Euler fa servir el d'aplicada.

Les aplicades, com les abscisses, són intervals. Cada aplicada necessita la seua pròpia perpendicular i per tant no necessita introduir un eix d'aplicades, però la construcció de cada aplicada depén de la construcció prèvia de l'abscissa corresponent.

De nou, fixa arbitràriament els valors positius per sobre la recta, i els negatius, per sota.

En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* l'ordenada ja no és la perpendicular, sinó la seua longitud, que es pot expressar mitjançant el segment *PM* o el seu igual *AQ*. O, el més important, la seua longitud, *ab*, portada sobre la recta *AC* (Fig. 7), que es converteix d'aquesta manera en un autèntic eix d'ordenades.

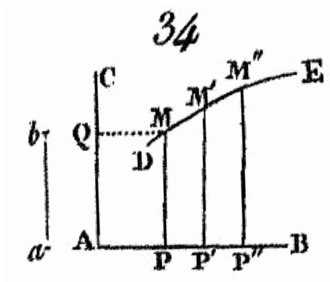

Figura 7. Eix d'ordenades en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

Establiment d'eixos de coordenades absoluts

En la *Introductio* les coordenades no són parells de nombres sinó magnituds que es representen mitjançant segments dotats de sentit: les abscisses mesurades des de l'origen en un únic eix, el d'abscisses, i les aplicades, habitualment perpendiculars, des dels extrems de les abscisses.

Abscisses i aplicades estan lligades entre si per una corba o per la seua equació. El sistema de coordenades no es fixa prèviament, depén de la natura de la corba que es vol representar.

En els tractats de Lacroix, les coordenades s'alliberen de la rigidesa que imposen els extrems de les magnituds a les abscisses i sobretot a les aplicades; es desprenen dels extrems i conserven, de les seues predecessores, únicament la distància o longitud de les magnituds.

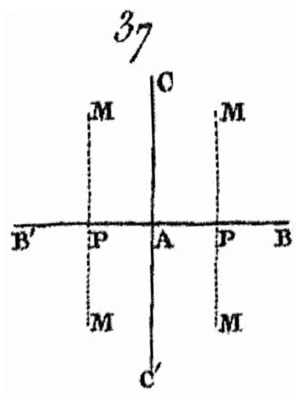

Figura 8. Representació de punts al pla en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

pour le point *M* de l'angle	*BAC*,.....	$+ AP$	ou	$+ x$
		$+ PM$		$+ y$
	B'AC,.....	$- AP$		$- x$
		$+ PM$		$+ y$
	B'AC',.....	$- AP$		$- x$
		$- PM$		$- y$
	BAC',.....	$+ AP$		$+ x$
		$- PM$		$- y$

Figura 9. Conveni d'oposició de signes en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

En el *Traité Élémentaire de Trigonométrie* les coordenades són un parell de valors que es representen en el pla (Fig. 8) mitjançant distàncies (longitud d'una magnitud) seguint la direcció dels eixos fixats prèviament i mesurats des de l'origen segons el conveni d'oposició dels signes (Fig. 9).

Les coordenades determinen la posició d'un punt a partir de dos eixos, que fixen la direcció, i un origen que divideix el pla en quatre angles en els quals s'estableix, pel conveni d'oposició de signes, on es representa un punt qualsevol segons els signes de l'abscissa i l'ordenada conjuntament.

Traçat de corbes en el pla

Per tots dos autors, les coordenades són l'instrument que permet realitzar dos processos recíprocs: el traçat per a cada funció-equació d'una línia recta o corba que expresse la seua natura; i l'obtenció, a partir de les relacions geomètriques que s'estableixen en la corba entre les abscisses i les aplicades-ordenades, de l'equació que associa la corba amb la funció.

Com es duu a terme el traçat?

Podríem dir que el que fa Euler en la *Introductio* és construir una taula il·limitada de valors, valors que no són parells ordenats de nombres sinó magnituds que es representen, en un sistema de coordenades (generalment perpendiculars) en què s'utilitza un únic eix, mitjançant segments (l'abscissa i l'aplicada) dotats de sentit, i són els extrems de les aplicades els que tracen la corba de la funció. Però és necessari advertir que la corba no es descriu per un punt que es mou, ni és un conjunt de punts.

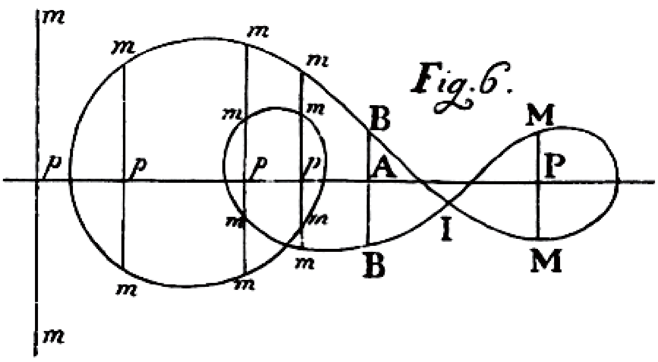

FIGURA 10. Traçat de la corba d'una funció quadriforme en la *Introductio*.

La figura 6 del text d'Euler (Fig. 10) representa la corba d'una funció quadriforme en què s'observa que a cada abscissa li corresponen quatre aplicades, o dues o cap o es reuneixen en una. Quan s'obtenen per a l'aplicada valors imaginaris, aquests no proporcionen punts de la corba.

En el *Traité du Calcul*, Lacroix segueix utilitzant les magnituds per traçar la corba com a lloc geomètric corresponent a una equació. Els valors de x es representen mitjançant segments sobre l'eix d'abscisses la longitud dels quals és el valor de x; i els valors de y, mitjançant segments segons la direcció fixada a priori, de la recta AC i de longitud el valor de y corresponent. Com en la *Introductio*, són els extrems dels segments PM els punts que donen lloc al traçat de la corba (Fig. 11).

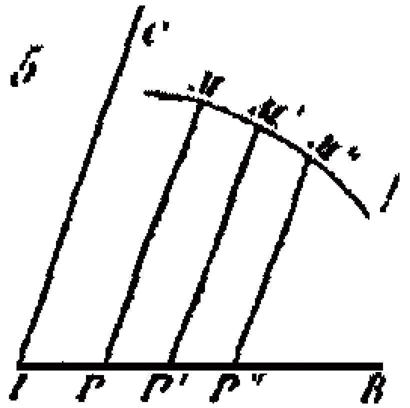

FIGURA 11. Traçat de la corba en el *Traité du Calcul* de Lacroix.

La corba no es descriu com un punt que es mou, però encara que de l'equació solament es puguen obtenir punts aïllats, sempre es podran determinar punts tan immediats com es vulga ja que la variable x pot prendre qualsevol valor i per tant la diferència entre dos valors de x podrà ser tan xicoteta com es desitge, com exposa en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

Però, a més, en el *Traité du Calcul* Lacroix elabora una taula de valors per construir la corba per punts, amb el propòsit de conèixer-la millor. Punts els valors dels quals es calculen en l'equació corresponent i es representen en el pla, en un sistema de coordenades perpendiculars amb dos eixos, mitjançant la longitud de segments i tenint en compte el seu sentit, segons representen valors positius o negatius.

Tenint en compte que el concepte de funció en l'època de Lacroix no és el concepte actual, veiem com representa la corba d'equació:

$$1\, y^4 - 96\, a^2 y^2 + 100\, a^2 x^2 - x^4 = 0$$

per a $a = 1$.

En aïllar y de l'equació $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$ s'obtenen les quatre expressions següents en funció de y (Fig. 12):

$$y = \sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (1),$$
$$y = \sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (2),$$
$$y = -\sqrt{48a^2 + \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (3),$$
$$y = -\sqrt{48a^2 - \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \ldots (4).$$

$$y = \sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \quad \ldots(1)$$
$$y = \sqrt{48 - \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \quad \ldots(2)$$
$$y = -\sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \quad \ldots(3)$$
$$y = -\sqrt{48 + \sqrt{x^4 - 100x^2 + 2304}} \quad \ldots(4)$$

FIGURA 12. Branques de la corba d'equació $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$.

expressions que donaran lloc a quatre branques semblants dues a dues, (1) i (3); i (2) i (4). Per açò serà suficient considerar les equacions (1) i (2) per elaborar la taula de valors (Fig. 13) que faran conèixer millor la figura de la corba.

La taula s'elabora donant successivament a x els valors 1, 2, 3, 4, etc., i calculant els valors de y per aproximació.

Lorsque $x=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	etc.
l'équation (1) donne $y=$	9,798	9,744	9,582	9,302	8,887	8,289	6,928	*imagin.*	6,928	8,698	9,798	10,845	11,872	etc.
et l'équation (2) donne $y=$	0	1,021	2,045	3,076	4,125	5,224	6,928	*imagin.*	6,928	4,510	0	*imagin.*	*imagin.*	etc.

FIGURA 13. Taula de valors de la corba d'equació $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$.

A partir de la taula representa gràficament la funció (Fig. 14),

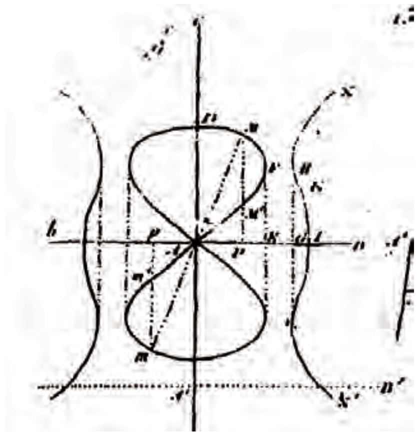

FIGURA 14. Corba de la funció d'equació $y^4 - 96y^2 + 100x^2 - x^4 = 0$.

en què s'aprecia que quan s'obtenen per a y valors imaginaris, els valors de la taula no proporcionen punts de la corba.

Com obtenir l'equació a partir del curs de la corba?

Als tres tractats, corbes diferents donen origen a equacions diferents; però equacions diferents, donada l'arbitrarietat del sistema de coordenades, no tenen per què donar origen a corbes diferents. L'establiment d'uns eixos absoluts comporta el fet que una mateixa corba puga estar representada per diferents equacions, en funció de la posició de la corba respecte dels eixos.

Per determinar quines equacions estan associades a una mateixa corba cal obtenir les equacions de canvi de coordenades, les quals proporcionaran les equacions generals dels diferents tipus d'equacions (funcions).

Euler dedica moltes pàgines en la *Introductio* a l'obtenció de les equacions de canvi de coordenades i les utilitza per obtenir l'equació general de la recta. Lacroix, per la seva banda, obté l'equació general de la recta com l'equació d'un lloc geomètric referit a un sistema de coordenades prèviament fixat fent servir les propietats geomètriques de les magnituds.

Obtenció de l'equació de la recta en la Introductio

Euler fa servir les equacions de canvi de coordenades per obtenir l'equació general de la recta. Les equacions generals de canvi de coordenades establertes prèviament per Euler són:

$$x = mu + nt - f$$
$$y = nu - mt - g$$

que es corresponen a les equacions que actualment escriuríem:

$$\left.\begin{array}{l} x = u \cdot \sin q + t \cdot \cos q - f \\ y = u \cdot \cos q - t \cdot \sin q - g \end{array}\right\}$$

El significat dels paràmetres de les equacions generals d'Euler es pot veure comparant l'expressió d'Euler amb l'expressió actual. Una anàlisi més detallada es pot veure en Navarro i Puig (2011).

En el cas de la recta, el canvi de coordenades que farà Euler és un canvi d'eix, l'equació del qual és $y = nu - mt - g$. L'equació de la recta l'obtindrà simplement substituint y per a.

En efecte, comença considerant la recta *LN* paral·lela a l'eix *RS* (Fig. 15).

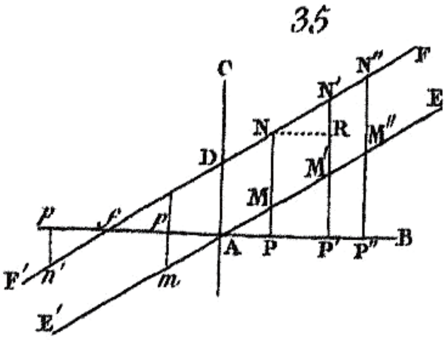

FIGURA 15. Equació de la recta en la *Introductio*.

S'observa que l'aplicada *PM* sempre és una magnitud constant, independentment d'on se situe l'origen d'abscisses. Anomena a dita magnitud *a* i per tant l'equació de la recta paral·lela a l'eix *RS* és $y = a$.

L'equació general de la recta s'obté substituint *y* per *a* en l'equació de canvi de l'eix *RS* per l'eix *rs*:

$$y = nu - mt - g$$

on $DG = g$; sinus de l'angle, $ODs = m$; cosinus de l'angle, $ODs = n$; l'abscissa, $DQ = t$; i l'aplicada, $MQ = u$.

És a dir, $nu - mt - g - a = 0$

Equació general de la recta que finalment expressa com a: $\alpha u + \beta t + b = 0$.

Obtenció de l'equació de la recta en el Traité Élémentaire de Trigonométrie

1r. Equació de la recta que passa per l'origen.

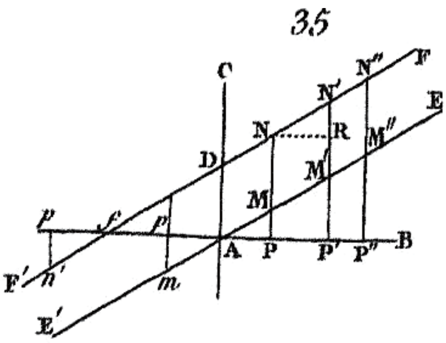

FIGURA 16. Equació de la recta en el *Traité Élémentaire de Trigonométrie*.

Lacroix considera la recta *AE* tirada pel punt *A* (Fig. 16), aleshores, totes les perpendiculars *PM*, *P'M'*, *P''M''*…, baixades sobre la línia *AB*, determinen una sèrie de triangles *APM*, *AP'M'*, *AP''M''*…, tots semblants entre si, per tant:

$$\frac{PM}{AM} = \frac{P'M'}{AP'} = \frac{P''M''}{AP''} = etc.$$

Anomena *a* la raó de semblança i per tant es compleix:

$$PM = a \times AP;\ P'M' = a \times AP';\ P''M'' = a \times AP'',\ etc.$$

La variable *x* comprén tots els valors de les abscisses *AP*; i la variable *y*, totes les ordenades *PM*; per tant, l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades és:

$$y = ax$$

2n. Equació general de la recta $y = ax + b$.

Lacroix fa un estudi sistemàtic de la recta que inclou: equació general de l'equació de la recta per a valors positius de les incògnites, interpretació de la constant *a*, condició de paral·lelisme, tall amb l'eix d'ordenades, equació general de l'equació de la recta per a valors negatius de les incògnites, tall amb l'eix d'abscisses, equació general de la recta, equació de la recta que passa per dos punts, equació de la recta que passa per un punt donat i que forma un angle qualsevol amb l'eix *x*, distància entre dos punts, longitud d'un segment de la recta, equació de la recta paral·lela a una recta donada i que passa per un punt donat, condició de perpendicularitat, intersecció de dues rectes, distància d'un punt a una recta i angle entre dues rectes.

D'aquest estudi referirem només els punts que ens condueixen a l'obtenció de l'equació general de la recta.

De totes les equacions entre dues indeterminades la més simple és la del primer grau, pertany a la línia recta, la més simple de totes les línies. Aquesta equació pot representar-se per $Cy = Ax + B$; dividint-la per *C* no perdrà generalitat, i fent $\frac{A}{c} = a$, $\frac{B}{c} = b$, s'obté $y = \frac{A}{c}x = + \frac{B}{c}$, o $y = ax + b$.

Encara que poguérem pensar que la generalitat d'aquesta equació és tal com l'entenem en l'actualitat no és del tot cert, ja que en la construcció inicial tant les incògnites com les constants representen exclusivament quantitats positives i només es parla de la recta en el primer quadrant. Immediatament Lacroix prolonga la línia donant a *x* valors negatius i per subratllar que s'està considerant valors negatius escriu l'equació de la forma $y = -ax + b$, és a dir, per indicar que *x* és negatiu no escriu *x* sinó *-x*.

Aleshores, l'equació general de la recta serà $y = ax + b$, si *x* és positiva; però $y = -ax + b$, si *x* és negativa. Cada vegada que fa referència al fet que les incògnites poden prendre qualsevol valor, aquest valor és positiu; i si vol subratllar que el valor és negatiu hi anteposa el signe –. A més, ens recorda de nou que si l'abscissa (ordenada) representa un valor positiu de la incògnita *x* (*y*), es representa a la dreta (per sobre) de l'origen de coordenades i se simbolitza per *AP*; si l'abscissa representa un valor negatiu de *x*, es representa a l'esquerra de l'origen de coordenades i se simbolitza per *Ap*.

Davant d'aquest plantejament podríem dir que una de les majors aportacions, en l'època (l'obra) de Lacroix, respecte a la representació gràfica de funcions o de llocs geomètrics en el pla mitjançant les coordenades cartesianes consisteix en el reconeixement i justificació de l'ús de les quantitats negatives en la representació gràfica de funcions, ja que es reconeix que la forma de la gràfica de la funció depén en gran manera de l'ús de les quantitats negatives; és més, no es pot obtenir la forma completa d'una línia si no es fan servir les quantitats negatives.

Referències bibliogràfiques

BOYER, C. (2007), *Historia de la matemática* (3ª reimpresión), Madrid, Alianza Editorial.

CONTRERAS, M.; MONZÓ, O.; PUIG, L. (eds.), *Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana* (Vol. I), València, Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwārizmī», 225-242.

EULER, L. (1748), *Introductio in analysin infinitorum* (2 vol.), Lausanne, Marcum-Michaelem Bousquets y Socios.

EULER, L. (1796), *Introduction a l'analyse infinitésimale* (Vol. 1), Paris, Chez Barrois.

EULER, L. (1797), *Introduction a l'analyse infinitésimale* (Vol. 2), Paris, Chez Barrois.

EULER, L. (2000), *Introducción al análisis de los infinitos*, Sevilla, SAEM «Thales», Real Sociedad Matemática Española.

KLEIN, F. (2006), *Matemática elemental desde un punto de vista superior. Aritmética, Álgebra, Geometría*, Tres Cantos, Nivola.

LACROIX, S. F. (1797), *Traité de calcul différentiel I* (première édition), Paris, Duprat.

LACROIX, S. F. (1807), *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et d'application de l'algèbre à la géométrie* (quatrième édition), Paris, Courcier.

LACROIX, S. F. (1820), *Tratado elemental de trigonometría rectilínea y de la aplicación del álgebra a la geometría* (sexta edición), Madrid, En la Imprenta Real.

NAVARRO, M.; PUIG, L. (2011), «L'herència d'Euler: coordenades cartesianes i traçat de corbes al volum II de la *Introductio in Analisyn infinitorum*». A:

SCHUBRING, G. (1987), «On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author», *For the Learning of Mathematics*, **7**, 41-51.

SIERRA, M. (1997), «Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria». A: RICO, L. (ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, Horsori/Universitat de Barcelona/ICE, 179-194.